

文章编号: 1000-7598-(2003) 05-0733-06

边坡稳定的有限元塑性极限分析

王汉辉, 王均星, 王开治

(武汉大学 水利水电学院, 湖北 武汉 430072)

摘 要: 系统地介绍了结构塑性极限分析的原理和方法。借助有限单元法和线性规划, 运用塑性极限分析的下限法, 可求解岩土边坡的极限承载力和安全系数。算例表明了该方法的正确性并具有较高的精度, 同时, 分析了该方法的困难所在。

关 键 词: 节理; 塑性极限分析; 下限法; 安全系数

中图分类号: U 416; O 242 **文献标识码:** A

Plastic limit analysis of slope stability using finite element

WANG Han-hui, WANG Jun-xing, WANG Kai-zhi

(School of Water Resources and Hydropower, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: The theory and method of the plastic limit analysis have been introduced systematically; by using the finite element methods and linear programming, the lower limit method can evaluate the bearing capacity and the safety factor of the rock-soil slope. The example shows the correctness and the high precision of this method; meanwhile, its difficulty has been analyzed.

Key words: joint; plastic limit analysis; lower limit method; safety factor

1 前 言

目前, 常用的边坡稳定分析方法是刚体极限平衡法和有限单元法。前者, 以其概念清晰、计算简便、工程实践经验丰富而被广泛地采用, 但未考虑岩体的应力-应变关系, 不能给出相应的应力场和位移场; 后者, 虽然能给出边坡的应力场和位移场, 却无法给出相应可靠的安全系数, 在工程上作为边坡稳定分析的参考方法。在实际工程中, 人们关心的不是边坡失稳的整个过程, 而是边坡开始滑动那一瞬间边坡的承载能力以及边坡的应力状态或位移场, 或者是边坡在正常工作下的安全度。而塑性极限分析法的最大优点就是回避了工程中不易弄清楚的本构关系, 直接地研究边坡的极限状态, 因此, 是一种合理而且可行的方法。

极限分析法从极大极小原理出发, 运用上限解法和下限解法, 放松极限荷载的某些约束条件, 寻求问题的上限解和下限解, 而问题的真正解答在上限解与下限解之间。岩土材料没有唯一的极限荷载, 借助于理想塑性材料的上下限定理, 并考虑岩石材

料的摩擦屈服特性及流动特性, 可以推求极限荷载的近似值。由此得出的应力场为其下限解, 所得的位移场为其上限解。本文着重研究下限法。

2 塑性极限分析的基本原理

2.1 极限状态

结构物内部构成了破坏结构的状态通常称为极限状态, 它是结构物在破坏与未破坏之间的临界状态, 应该满足下述条件: (1) 平衡条件; (2) 边界条件; (3) 屈服条件; (4) 破坏机构条件。完全满足上述 4 个条件的解答称为极限状态的完全解或真解, 只满足部分条件的解答称为极限状态的近似解, 比如下限解。满足条件 (1) ~ (3) 的结构应力场为静力容许应力场, 它是极限状态下应力场的下限解。

2.2 极限分析下限原理

结构物有多种静力容许应力状态, 每个静力容许应力状态对应着一个外荷载。因为结构尚未破坏, 因而, 这个荷载一定比极限荷载小。下限定理可以表述为: 在所有的与静力容许应力场对应的荷载中,

最大的荷载为极限荷载,与最大荷载对应的静力容许应力场为破坏应力场。

2.3 基本假定

为了简化计算,采用如下假定^[1]: (1) 材料是理想刚塑性的,因此,屈服函数不随应力的改变而改变; (2) 结构物即使临近破坏状态时,变形依然很小,平衡方程在结构物变形前后不变; (3) 参与超载的外荷载按同一比例增加,以确定超载系数;

(4) 各种材料强度参数按同一比例降低,以确定材料强度储备系数。

3 下限法的基本方程

3.1 单元的离散

本文仅讨论二维问题。土体或岩石用三角形单元离散,岩体中的软弱结构面或软弱夹层可用(无厚度或有厚度)节理单元模拟。不同的单元可赋予不同的力学参数以反映其不均匀性,但同一单元的材料均一,可以考虑不同材料分区。

3.1.1 三角形单元的应力表示

假定三角形单元的应力分量在单元内部呈线性分布,则单元内任一点的应力分量可表示为节点应力分量的线性函数^[2]:

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^3 N_i \sigma_{xi}; \quad \sigma_y = \sum_{i=1}^3 N_i \sigma_{yi}; \quad \tau_{xy} = \sum_{i=1}^3 N_i \tau_{xyi} \quad (1)$$

式中 N_i 为节点坐标的线性函数,其具体表达式见一般的有限元文献。由于塑性极限分析不考虑本构关系,采用的是刚塑性模型,构造的是静力容许应力场,允许应力间断,因此,每个节点只属于某一个特定的单元,即不同单元的节点可具有相同的坐标(见图1)。

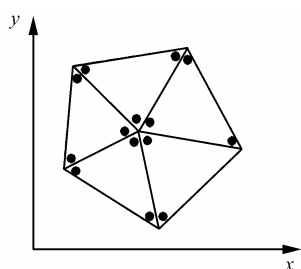


图1 下限法三角形单元应力有限元模式
Fig.1 Triangle element finite stress model of lower limit method

3.1.2 节理单元的应力表示

在岩土工程当中,一般都存在软弱结构面,通常它们是结构安全的控制因素,对于岩坡稳定性更是如此。将软弱结构面离散成等厚度节理单元(包括无厚度单元),与三角形单元形成混合网格(图2)。

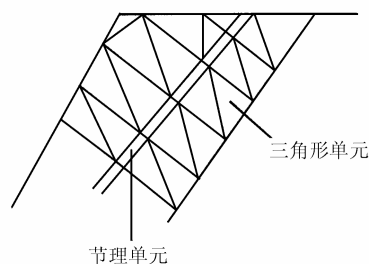


图2 边坡混合单元
Fig.2 Hybrid elements of slope

单元厚度与长度相比很小,因此,可以假定节理单元的应力分量沿厚度方向为常量,在长度方向呈线性变化,在局部坐标下(见图3)可用其节点应力表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \frac{1}{2} [(1-S/L)(\sigma_{s1} + \sigma_{s2}) + S/L(\sigma_{s3} + \sigma_{s4})]; \\ \sigma_t &= \frac{1}{2} [(1-S/L)(\sigma_{t1} + \sigma_{t2}) + S/L(\sigma_{t3} + \sigma_{t4})]; \\ \tau_{st} &= \frac{1}{2} [(1-S/L)(\tau_{ts1} + \tau_{ts2}) + S/L(\tau_{ts3} + \tau_{ts4})] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 $\sigma_s, \sigma_t, \tau_{st}$ 为节理单元任一点的应力分量;
 $\sigma_{si}, \sigma_{ti}, \tau_{sti} (i=1, 2, 3, 4)$ 为节点应力分量。

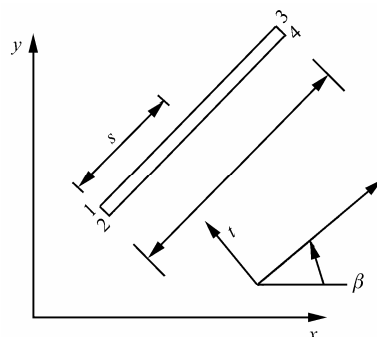


图3 下限法节理单元应力有限元模式
Fig.3 Joint element finite stress model of lower limit method

通过坐标转换矩阵,整体坐标系下节理单元的应力可表示为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T][M] \begin{bmatrix} [T]^{-1} & & & \\ & [T]^{-1} & & 0 \\ 0 & & [T]^{-1} & \\ & & & [T]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma^e \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{其中, } [T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & -\sin 2\beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \sin 2\beta \\ \frac{1}{2} \sin 2\beta & -\frac{1}{2} \sin 2\beta & \cos 2\beta \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\{M\} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & M_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{S}{L} \right); \quad M_2 = \frac{1}{2} \frac{S}{L}; \\ x &= \frac{1}{2} (x_1 + x_2) + s \cos \beta; \quad y = \frac{1}{2} (y_1 + y_2) + s \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中 β 为局部坐标与整体坐标的夹角, 从整体转到局部, 以逆时针为正。

3.2 平衡方程

平衡方程的一般形式为

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \gamma \quad (7)$$

式中 γ 为材料重度。将上述三角形单元与节理单元的应力表达式代入平衡方程 (7), 即得各自的平衡方程形式。

3.2.1 三角形单元的平衡方程

$$[A^e] \{\sigma^e\} = \{b^e\} \quad (8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} [A^e] &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i & b_j & 0 & c_j & b_k & 0 & c_k \\ 0 & c_i & b_i & 0 & c_j & b_j & 0 & c_k & b_k \end{bmatrix}; \\ \{\sigma^e\} &= \{\sigma_{x1}^e, \sigma_{y1}^e, \tau_{xy1}^e, \sigma_{x2}^e, \sigma_{y2}^e, \tau_{xy2}^e, \sigma_{x3}^e, \sigma_{y3}^e, \tau_{xy3}^e\}^T; \\ \{b^e\} &= \{0, \gamma^e\}; \\ b_i &= y_j - y_k; \quad c_i = -x_j + x_k, \quad (i = i, j, k) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中 (x_i, y_i) 为节点坐标; A 为三角形单元的面积。

3.2.2 节理单元的平衡方程

$$[A^j] \{\sigma^j\} = \{b^j\} \quad (10)$$

由于在式 (3) 中仅 M 与坐标 (x, y) 有关, 且呈线性关系, 所以, 式 (10) 中 $[A^j]$ 仅与节理单元长度 L 和节理单元的倾角等常数有关, 为 2×12 阶矩阵。 $\{\sigma^j\}$ 为节理单元中节点的应力分量, $\{b^j\} = \{0, \gamma^j\}$; γ^j 为节理单元的材料重度。

由以上平衡方程可以看出, 虽然是以两种单元中的任一点进行平衡分析, 但由于假定应力在各单元内是线性分布, 因此, 所得到的平衡方程与单元内的坐标无关, 这样, 每个单元只有一个平衡方程组, 两个平衡方程。

3.3 应力间断面连续条件

由于假定单元应力呈线性分布, 且允许在单元相邻边上应力间断, 但必须保证相邻边上的剪应力与正应力大小相等, 方向相反。这是由静力许可场应力平衡条件决定的, 因而, 对每一条边都要满足

相邻单元在此边上的剪应力和正应力相等 (作用力与反作用力相等的要求)。对一条与 x 轴夹角为 θ (逆时针方向为正) 的斜线 (图 4), 其正应力、剪应力可用整体坐标下的应力分量表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sin^2 \theta \sigma_x + \cos^2 \theta \sigma_y - \sin 2\theta \tau_{xy}; \\ \tau &= -\frac{1}{2} \sin 2\theta \sigma_x + \frac{1}{2} \sin 2\theta \sigma_y + \cos 2\theta \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

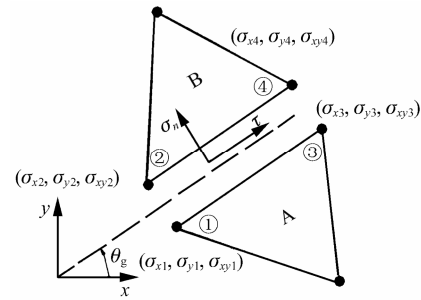


图 4 三角形静定许可应力不连续

Fig.4 Statically allowable stresses discontinuity between adjacent triangles

对于 2 个三角形或节理单元的公共边 g , 该边的两对节点分别是 (1, 2), (3, 4)。由于公共边 g 上任一点都需满足法向正应力和切向剪应力连续, 而 2 个单元的应力分量在公共边上也呈线性分布, 所以, 公共边两端点满足此条件能够保证整个公共边满足应力间断面连续条件:

$$\sigma_{n1}^A = \sigma_{n2}^B; \quad \sigma_{n3}^A = \sigma_{n4}^B; \quad \tau_1^A = \tau_2^B; \quad \tau_3^A = \tau_4^B \quad (12)$$

用节点在整体坐标下的应力分量可表示为

$$[A^g] \{\sigma^g\} = \{0\} \quad (13)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} [A^g] &= \begin{bmatrix} T_1 & -T_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1 & -T_1 \end{bmatrix}; \\ [T_1] &= \begin{bmatrix} \sin^2 \theta_g & \cos^2 \theta_g & -\sin 2\theta_g \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta_g & \frac{1}{2} \sin 2\theta_g & \cos 2\theta_g \end{bmatrix}; \\ \{\sigma^g\} &= [\sigma_{x1}^g, \sigma_{y1}^g, \sigma_{xy1}^g, \sigma_{x2}^g, \sigma_{y2}^g, \sigma_{xy2}^g, \sigma_{x3}^g, \sigma_{y3}^g, \sigma_{xy3}^g, \sigma_{x4}^g, \sigma_{y4}^g, \sigma_{xy4}^g]^T \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

3.4 应力边界条件

设某单元某一边 b 上作用有线性荷载, 一般情况下, 可分解为法向分布荷载和切向分布荷载见图 5。由于单元应力分量沿任一边都呈线性分布, 所以, 实际上只要满足下面条件即可保证边界条件严格满足:

$$\sigma_{n1}^b = q_1; \quad \sigma_{n2}^b = q_2; \quad \tau_1^b = t_1; \quad \tau_2^b = t_2 \quad (15)$$

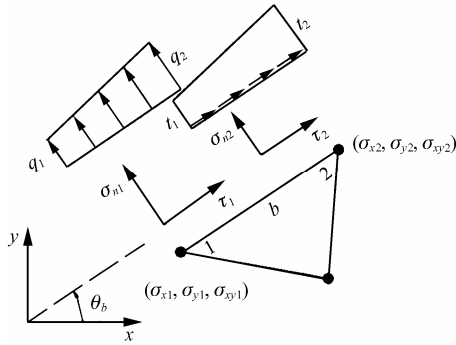


图 5 应力边界条件

Fig.5 Stress boundary condition

如果边界 b 与 x 轴的夹角为 θ ，则应力边界条件可用节点应力表示为

$$[A^b]\{\sigma^b\} = \{b^b\} \quad (16)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} [A^b] &= \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}; \\ [T] &= \begin{bmatrix} \sin^2 \theta_b & \cos^2 \theta_b & -\sin 2\theta_b \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta_b & \frac{1}{2} \sin 2\theta_b & \cos 2\theta_b \end{bmatrix}; \\ \{\sigma^b\} &= [\sigma_{x1}^b \quad \sigma_{y1}^b \quad \tau_{xy1}^b \quad \sigma_{x2}^b \quad \sigma_{y2}^b \quad \tau_{xy2}^b]^T; \\ \{b^b\} &= [q_1 \quad t_1 \quad q_2 \quad t_2] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

3.5 屈服条件

对于岩土材料的三角形单元和节理单元均采用 Mohr-Coulomb 屈服准则。

3.5.1 Mohr-Coulomb 屈服条件

对于平面应变问题，Mohr-Coulomb 屈服准则可表示为

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - (2c \cos \varphi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \varphi)^2 = 0 \quad (18)$$

式中 正应力以拉为正； c ， φ 分别为材料的凝聚力和内摩擦角。按照下限定理，要求任一单元的每一点的应力都在该屈服面内。考虑到后面数学线性规划的要求，对上式进行线性化处理。令 $X = \sigma_x - \sigma_y$ ， $Y = 2\tau_{xy}$ ， $R = 2c \cos \varphi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \varphi$ ，则在 XY 坐标系中，上述屈服条件为一个圆（见图 6），圆的半径与应力水平有关。用内接正多边形对屈服圆进行近似屈服，任意相邻的两个顶点坐标为

$$\left. \begin{aligned} X_k &= R \cos\left(\frac{2k-1}{n} \pi\right); \quad Y_k = R \sin\left(\frac{2k-1}{n} \pi\right); \\ X_{k+1} &= R \cos\left(\frac{2k+1}{n} \pi\right); \quad Y_{k+1} = R \sin\left(\frac{2k+1}{n} \pi\right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

点 $k, k+1$ 的直线方程可表示为

$$f_k = -\frac{X - X_k}{X_{k+1} - X_k} + \frac{Y - Y_k}{Y_{k+1} - Y_k} = 0 \quad (20)$$

屈服条件可写成 $f_k \leq 0$ ， $(k=1, 2, \dots, n)$ ，即

$$A_k \sigma_x + B_k \sigma_y + C_k \tau_{xy} \leq D, \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \cos(2k\pi/n) + \sin \varphi \cos(\pi/n); \\ B_k &= -\cos(2k\pi/n) + \sin \varphi \cos(\pi/n); \\ C_k &= 2 \sin(2k\pi/n); \quad D = 2c \cos \varphi \cos(\pi/n) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

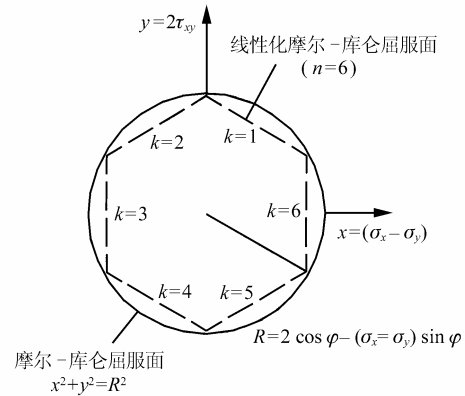


图 6 屈服条件线性化

Fig.6 Linearization of yield condition

由于应力在单元内部呈线性分布，所以，只要在单元的节点使应力满足上述屈服条件就能保证整个单元各点都满足该屈服条件。对于每一个单元其屈服条件可用节点应力表示成

$$A_k \sigma_{xi} + B_k \sigma_{yi} + C_k \tau_{xyi} \leq D, \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (23)$$

式中 对于三角形单元 $i=1, 2, 3$ ；对于节理单元 $i=1, 2, 3, 4$ 。

3.5.2 屈服条件的矩阵表示

屈服条件都可用一般形式表示如下：

$$[A_y^i]\{\sigma^i\} \leq \{b_y^i\}, \quad (i \text{ 为单元的节点号}) \quad (24)$$

对于 Mohr-Coulomb 屈服准则，有

$$[A_y^i] = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_n & B_n & C_n \end{bmatrix}; \quad \{\sigma^i\} = [\sigma_{xi} \quad \sigma_{yi} \quad \tau_{xyi}]^T$$

$$\left. \begin{aligned} \{b_y^i\} &= \left(2c \cos \varphi \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), 2c \cos \varphi \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \dots, \right. \\ &\quad \left. 2c \cos \varphi \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right)^T \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

对于三角形单元 $i=1, 2, 3$ ；对于节理单元 $i=1, 2, 3, 4$ 。

3.5.3 屈服条件线性化对极限荷载的影响

按照下限定理的推论, 在其它条件相同的情况下, 如果新的屈服面包含于原屈服面, 则新的极限荷载不大于原极限荷载。因此, 屈服面用内接多边形线性化后, 所求极限荷载不大于原屈服面的极限荷载。当内接多边形的边数无穷大时, 新的屈服面趋向于同原屈服面重合。按照这一理论, 屈服面按照本文方式线性化后所求得的极限荷载不会大于真实的极限荷载, 符合下限定理的定义。

3.6 线性规划

3.6.1 目标函数

在边坡工程当中, 一般没有明确的外荷载, 但间接等效荷载作用是存在的, 比如开挖的影响, 裂隙水压力的陡然增加等, 可以等效当作面荷载处理。边坡的自重是边坡的主要荷载, 它在平衡方程中单独为一项; 在结构安全度的讨论时, 曾定义超载安全系数和结构强度储备系数, 求结构的极限荷载对应的是结构的超载系数, 而结构的强度储备系数可由降低结构材料强度参数至破坏而得到。基于上述讨论, 对于边坡工程的下限定理可建立 3 种目标函数。

第 1 种: 求外荷 (面荷载) 的极大值。外荷载沿边长呈线性分布, 则基本荷载为

$$P_0 = \frac{lh}{2}(p_1 + p_2) \quad (26)$$

式中 l 为边长; h 为厚度; p_1, p_2 边界两端点的荷载强度。按比例增加荷载到 $P = \alpha_1 P_0 = \frac{lh\alpha_1}{2}(p_1 + p_2)$, 根据应力边界条件, 有

$$P = [L^s] \{\sigma^s\} \quad (27)$$

式中 $[L^s] = \frac{\alpha_1 lh}{2} [\sin^2 \theta_s \cos^2 \theta_s - \sin 2\theta_s \sin^2 \theta_s \cos^2 \theta_s - \sin 2\theta_s]$; $\{\sigma^s\} = [\sigma_{x1}^s \quad \sigma_{y1}^s \quad \tau_{xy1}^s \quad \sigma_{x2}^s \quad \sigma_{y2}^s \quad \tau_{xy2}^s]^T$; θ_s 为应力边界的倾角。求 P 的最大值, 等同于求 α_1 的最大值, 所得的 α_1^s 为超载系数的下限值。

第 2 种: 求重度 γ 的极大值:

$$\gamma_l = \alpha_2 \gamma \quad (28)$$

式中 γ_l 为按比例增加的材料重度; α_2 为重度增加系数。将平衡方程中的 γ 换成 $\alpha_2 \gamma$, 求 α_2 的极大值。

第 3 种: 求边坡安全系数。采用强度储备系数来定义安全系数, 即

$$K = \tan \varphi / \tan \varphi^0 = c / c^0 \quad (29)$$

但由屈服条件约束可知, 这将导致一个非线性规划问题。文献[3]中采用迭代求解, 可以避免非线性规划问题, 本文采用类似的求解思想。

3.6.2 约束条件

前面讨论的应力平衡条件、应力间断条件, 屈服条件、应力边界条件可得到总的约束方程。

3.6.3 线性规划

文献[2, 4]总结了上述线性规划问题的特点, 即是一个约束条件个数远多于变量个数, 异常稀疏的超大规模线性规划问题。事实上, 有限元塑性极限分析法的困难就在于大规模线性规划问题的求解。Sloan 在文献[4]中提出了线性规划的有效集合算法, 并验证了解法的正确性和有效性, 作者认为, 针对问题的特点可采用分解算法[5]。另外, 改进的单纯形法长期以来积累了丰富的经验, 如果在存储, 误差减小方面采用有效的措施, 也可以取得较好的效果[6]。本文的算例采用改进过的改进对偶单纯形法求解。根据以上思想, 编制了下限程序 LBK1.FOR, 并调试成功。

4 算例

4.1 求解极限荷载

算例 1: 图 7 示出一均质土坡[7], 坡比为 1: 2, 土体的参数 $\gamma = 18.0 \text{ kN/m}^3$, $c = c_u = 30 \text{ kN/m}^2$, $\varphi = 0$, 求解: (1) 当坡顶作用均布荷载时, 求均布荷载的最大值; (2) 土坡在自然状态下的稳定安全系数。文献[8]中给出了当 $\gamma = 0$ 时的解析解, 上限解: $P^+ = 2c(1 + \alpha)$, 下限解为 $P^- = 2c(1 + \sin \alpha)$, 其中, α 为斜坡面与 y 轴的夹角, 此处, $P^+ = 126.43 \text{ kPa}$, $P^- = 113.67 \text{ kPa}$ 。

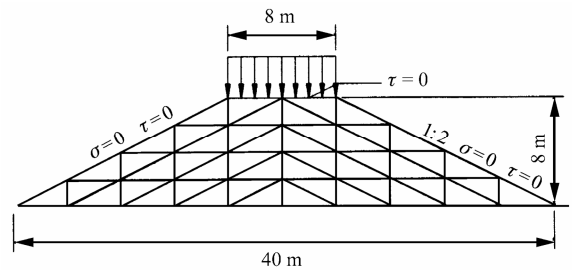


图 7 边界条件及土坡计算网格

Fig. 7 Boundary condition and mesh of soil slope

表 1 中给出了屈服函数线性化为不同多边形时, 边数与下限极限荷载的关系, 表 2 中是重度对极限荷载的影响。

